0.2.3. Coloquio 21/02/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 21/02/06
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Sea F un campo vectorial C^3 tal que $\nabla.F = 2$ y el flujo de F a través de la superficie descripta por $y = 1 - \sqrt{(x-1)^2 + 2z^2}, y \geq 1/2$ con el normal de coordenada y positiva es 3. Hallar el flujo de F a través de la superficie descripta por $(x-1)^2 + (y-1/2)^2 + 2z^2 = 1/4, y \leq 1/2$, con el normal con coordenada y negativa.

---

2. Sea F un campo vectorial C^3 tal que $\nabla \times F = (-2x, 3y - z, 1 - z)$, y sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1, z = a$, orientada de manera que su proyección en el plano xy esté positivamente orientada. Hallar a de manera que la circulación de F a lo largo de C sea 3π.

---

3. Graficar aproximadamente la superficie en $\mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 - z^2 \geq 1$, y calcular el área de su proyección en el plano yz.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) El plano tangente al gráfico de una función C^2 $f(x, y)$ en $(0, 1, 2)$ tiene ecuación $2x+4y-2z = 0$. Hallar una ecuación para la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 2$ en $(0, 1)$.

(**b**) Sea $h(x, y)$ una función C^3 cuyo polinomio de Taylor de grado 2 en el origen es $p(x, y) = x - y + x^2 + y^2$. Mostrar que la ecuación $h(x, y) = 0$ en el entorno de $(0, 0)$ define una función $y = y(x)$, y calcular aproximadamente $y(0.01)$.

---

5. Sabiendo que la función $y(x) = x^2 - x$ es solución de la ecuación diferencial $y'(x) + y(x) = x^2 + ax - 1$, hallar a y la solución de la ecuación que satisface $y(0) = 1$.

---

6. Hallar el área del trozo de superficie descripto por $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \leq y \leq \sqrt{3}z, x \geq 3$.

0.2.4. Coloquio 28/02/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 28/02/06
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Sea V la región de $\mathbb{R}^3$ descripta en coordenadas cilíndricas por $\rho \leq \cos(\varphi), 0 \leq z \leq 5 - \rho\cos(\varphi)$. Hallar el flujo del campo $F(x, y, z) = (z, 0, -z)$ a través del borde de V, hacia el exterior.

---

2. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2, sea $F(x, y, z) = (0, f(y) + xz, -2z + y)$, y sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 9, y = 2, z \geq 0$. Calcular la circulación de F a lo largo de C orientada de manera que su tangente tenga la coordenada x negativa.

---

3. Graficar aproximadamente la superficie en $\mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 6x - 5$, y calcular el área de su proyección en el plano xy.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sabiendo que la función f de clase C^1 tiene máximo local en $(2, 1)$ hallar un vector tangente a la curva parametrizada por

$$t \mapsto (\cos(t) + 1, \text{sen}(t) + 1, \text{sen}(t) + f(\cos(t) + 1, \text{sen}(t) + 1))$$

en el punto que corresponde a $t = 0$.

(**b**) Sea $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z)$ y sea V una esfera contenida en el octante $x > 0, y > 0, z > 0$. Mostrar que el flujo de F hacia el exterior de V es positivo.

---

5. Hallar una ecuación diferencial para la familia de curvas descripta por $y = a(x^2 - x), a \in \mathbb{R}$ y describir la familia de curvas ortogonales.

---

6. Hallar el área de la superficie en $\mathbb{R}^3$ descripta por $z = 3 - 3\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}, 1 \leq z \leq 2$.

0.2.5. Coloquio 07/03/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 07/03/06
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Sea $F(x, y, z) = (yz, y^2, y + 3z^2)$, y sea T la curva perímetro del triángulo de vértices $A = (1, 1, 0), B = (-1, 1, 2), C = (2, 1, 1)$ recorrida en el orden $A \mapsto B \mapsto C$. Calcular la circulación de F a lo largo de T.

---

2. Sea S la superficie parametrizada por

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta), \operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi$$

Hallar $a \in (-1, 1)$ de manera que el flujo de $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ a través de la porción de S en la que $z > a$, y con el normal alejándose del centro, sea $4\pi/3$.

---

3. Graficar aproximadamente la curva C en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$t \mapsto (2t^2, t, t), 1 \leq t \leq 2$$

y calcular la circulación de $F(x, y, z) = (1, y - z, y + z/2)$ a lo largo de C recorrida con t creciente.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Hallar un vector tangente en el punto $(6, 1, 2)$ a la curva de intersección del paraboloide de ecuación $x = 2y^2 + z^2$ con el cono de ecuación $x = \sqrt{6}\sqrt{2y^2 + z^2}$.

(**b**) Sea S una porción de área 2 del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcular el flujo a través de S, con el normal dirigido hacia el eje del cono, del campo $F(x, y, z) = (x, y, 1 + z)$.

---

5. Un corcho flota en la superficie de un estanque y su velocidad depende de su posición según

$$V(x, y) = (y, -2x)$$

Hallar la trayectoria del corcho si a tiempo $t = 0$ está en el punto de coordenadas $(1, 0)$.

---

6. Sea R la región en $\mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Hallar a de manera que el volumen de la parte de R contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 \leq a^2$ sea la mitad del volumen de R.

0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 04/07/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 04/07/06
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Sea R la región del espacio descripta por $(x-1)+y^2 \leq 4, x \geq a, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2$. Hallar a de manera que el flujo del campo $(2x, y, z)$ hacia el exterior de R sea 16π.

---

2. Dado $F(x,y,z) = (zx-1, -zy, 2ax^2+by^2)$ hallar a y b de manera que $\nabla \times F = 0$, y calcular la circulación de F a lo largo de la curva descripta por $z = 0, y \geq 0, x^2+y^2 = 1$ orientada de manera que la coordenada x de su tangente sea positiva.

---

3. Sea $F(x,y,z) = (x-z, y-z, -x-y)$. Hallar la circulación de F a lo largo del perímetro del cuadrilátero de vértices $(0,0,0), (1,0,0), (2,1,0), (1,1,0)$, recorrido según el orden en que los puntos han sido dados.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea D una región de área 3 en el plano de ecuación $x+y=1$. Hallar el flujo del campo $F(x,y,z) = (1,0,1)$ a través de D, con el normal de coordenada x positiva.

(**b**) Dada $f(x,y) = x^3y + x^2y^2$, hallar la circulación de $F(x,y) = \nabla(f)(x,y)$ a lo largo de la curva parametrizada por

$$t \mapsto (\operatorname{sen}(t), 2\cos(t))$$

con t desde 0 a $3\pi/2$.

---

5. Hallar una solución de la ecuación diferencial

$$(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$$

cuyo gráfico pase por el punto $(2,1)$.

---

6. Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ descripta por $x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$. Hallar el área de la superficie parametrizada por

$$(x,y) \mapsto (x, y, x+2y), (x,y) \in D$$

0.2.2. Coloquio 25/07/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 25/07/06
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Si el rotor de un campo F es $\mathbf{rot}(F) = (y - x, x + z, z)$ hallar la circulación de F a lo largo de la curva borde de la superficie descripta por $z + 1 = (x - 1)^2 + y^2, z \leq 3$, orientada de manera que su proyección en el plano xy se recorra en el sentido contrario a las agujas del reloj.

---

2. Dado $F(x, y, z) = (axy, (a^2 - a)yz, ayz)$ hallar a de manera que sea mínimo el flujo de F hacia el exterior del cuerpo descripto por $x^2 + y^2 \leq z \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1$.

---

3. Hallar el área de la superficie descripta por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, x^2 + y^2 \geq 1$. Graficar.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea $f(u, v)$ una función C^3 tal que su polinomio de Taylor en $(0, 0)$ es $p(u, v) = 2 - 3u - u^2 + av^2$. Hallar a tal que $g(x, y) = 1 - a^2x - f(2x, y)$ tenga mínimo en $(0, 0)$.

(**b**) Hallar a para que sea mínima la circulación del campo $(-a^2xy, y(x - y))$ a lo largo de la curva descripta por $x^2 + y^2 = 1, x \geq 0$, orientada de manera que la coordenada y de su tangente sea positiva.

---

5. Hallar una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial

$$(x - 1)y'(x) = 2x - y$$

cuyo gráfico pase por el punto $(0, 0)$.

---

6. Sea R la región en R^3 descripta por $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq -y$. Graficar R y calcular su volumen.

0.2.3. Coloquio 31/07/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 31/07/06
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Hallar el área de la superficie descripta por $x^2 + y^2 = z, 3\sqrt{x^2 + y^2} \geq z + 2$.

---

2. Dada una función de clase C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sea $F(x, y, z) = (f(y, z), ay, az + 1)$. Hallar a de manera que el flujo de F a través de la superficie descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, orientada con el normal de coordenada z positiva, sea 4π.

---

3. Sea C la curva parametrizada por $t \mapsto (\operatorname{sen} t, \cos t, 2t), 0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar la circulación del campo $F(x, y, z) = (y^2 z, 2xyz, xy^2)$ a lo largo de C orientada de manera que su tangente tenga coordenada z positiva.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Mostrar que cuando $x^2 + 2y^2 = 3$, se satisface $x^2 - y^2 \geq -3$.

(**b**) Dada $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial z}(-1, 1, 1) \neq 0$, sea C la curva descripta en un entorno de $(-1, 1, 1)$ por $F(x, y, z) = 0, x^2 + y^2 = 2$. Mostrar que $(-2, 2, 0)$ es perpendicular a C en $(-1, 1, 1)$.

---

5. Describir una curva que pase por $(2, 3)$ cuya tangente en (x, y) corta al eje y en $(0, 6y)$.

---

6. Sea R la región en $\mathbb{R}^3$ descripta por $x^2 + (y - 1)^2 = 4, 1 \leq x - z \leq 2$. Graficar R y calcular su volumen.

0.2.4. Coloquio 08/08/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 08/08/06
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Hallar $a > 0$ y una orientación para que la circulación del campo $F(x, y, z) = (y-z+x, z-x, x-y)$ a lo largo de la curva de ecuaciones $x^2 + y^2 = a^2, x + z/3 = 1$ sea -8π.

---

2. Hallar el flujo del campo $F(x, y, z) = (-y + z, x, 0)$ a través de la porción de cono descripta por $y = \sqrt{3(x^2 + z^2)}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, orientada de manera que el normal tenga coordenada y negativa.

---

3. Sea $f(x, y, z) = y$. Calcular $\int_C f(x, y, z)\, ds$, siendo C la curva descripta por $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 2x$

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (3, -2, 1) \times (x, y, z)$. Mostrar que el flujo de F a través de una región D acotada y contenida en el plano de ecuación $3x - 2y + z = 3$ es 0.

(**b**) Sea C la curva parametrizada por

$$t \mapsto (t^2, a(t^2 - 1), bt), t \in (-3, 0)$$

Hallar a y b de manera que la curva pase por $(1, 0, 1)$ y sea en ese punto perpendicular al plano de ecuación $4x + 2y + 2z = 6$.

---

5. Describir todas las curvas planas que pasan por $(1, 3)$ y tales que su normal en cualquier (x, y) pasa por $(1, 1)$.

---

6. Dado $h > 2$, sea R la región en $\mathbb{R}^3$ descripta por $0 \leq z \leq h - 2\sqrt{4x^2 + y^2}$. Hallar h de manera que el volumen de R sea 16π.

0.2.5. Coloquio 15/08/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 15/08/06
TEMA 1

(Los alumnos del primer cuatrimestre del 2005 deberán resolver los ejercicios $1, 2, 3, 4, 6$, los restantes los ejercicios $1, 2, 3, 4, 5$.)

---

1. Sea S la superficie descripta por $z = 9 - x^2 - y^2, x + 3 \leq z$. Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (x, 2y, x)$ a través de S orientada de manera que el normal tenga componente z negativa.

---

2. Dado $F(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y - x)$, hallar a y una orientación de manera que la circulación de F a lo largo de la curva descripta por $x^2 + y^2 = 1, z = a(x + y)$ sea 2.

---

3. Hallar la longitud de la curva descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y = 1$.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Si el polinomio de Taylor de orden 2 en $(1, 0)$ de una función C^3 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $p(u, v) = 2 + 3u + v^2 + u^2$, hallar todos los a, b, $b > 0$, de manera que $g(x, y) = f(3x + 1, y) + ax + by^2$ tenga extremo en $(0, 0)$.

(**b**) Sea S una porción de área 2π de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hallar el flujo a través de S, hacia el exterior de la esfera, de $F(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$.

---

5. Hallar una familia de curvas ortogonales a la familia de curvas descripta por $y = ce^{-2x} + 1, c \in \mathbb{R}$.

---

6. Hallar el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ descripta por $0 \leq z \leq 2x^2 + 4y^2, x \leq y \leq 2, x \geq 0$.

0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 14/12/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 14/12/06
TEMA 1

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función armónica. calcular el flujo del rotor de

$$(-f'_y(x,y) + 2y, f'_x(x,y) + x^2, 0)$$

a través de la superficie descripta por $x^2 + 6x + y^2 + z^2 = 11, z \geq 1$, con el normal de componente z positiva.

---

2. Hallar el flujo del campo $F(x,y,z) = (z, 0, -x + z)$ hacia el exterior del volumen descripto por

$$x^2 + z^2 \leq 1, -1 + x^2 + z^2 \leq y \leq 3 - x^2 - z^2$$

.

---

3. Sea C la curva parametrizada por $t \mapsto (2 + \operatorname{sen}(t), \cos(t) - 1, \cos(t) + \operatorname{sen}(t)), t \in (0, 2\pi)$. Hallar una ecuación de un plano que contenga a C, y calcular la circulación de

$$F(x,y,z) = (xz - 2z, yz + z, 0)$$

a lo largo de C orientada de manera que su proyección en el plano xy sea recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Hallar un campo vectorial no nulo tal que su flujo a través de las semiesferas descriptas por

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0$$

sea 0 para todo r.

(**b**) Sea C una línea de flujo del campo $(2x, 2y)$ que pasa por $(3,4)$. Mostrar que C es perpendicular en $(3,4)$ a la curva de ecuación $e^{x^2+y^2-25} = 1$

---

5. Hallar las soluciones $y(x)$ de la ecuación $xy'(x) - y(x) = 1$ cuyo gráfico en $(1, y(1))$ tiene pendiente 2.

0.2.2. Coloquio 21/12/06.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 21/12/06
TEMA 1

---

1. Sea $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 3)$ un campo vectorial C^2 en la región $D \subset R^3$ descripta por $x^2 + y^2 < 25, |z| < 10$. Suponiendo que $\nabla \times F = 0$ en D, calcular la circulación de $G(x,y,z) = (P(x,y,z) + z, yQ(x,y,z), 3z)$ a lo largo de la curva de ecuaciones $x^2 + z^2 = 4, y = 1$ orientada de manera que su vector tangente unitario en $(2,1,0)$ sea $(0,0,1)$.

---

2. Calcular el promedio de $f(x,y,z) = y + 1$ a lo largo de la curva descripta por

$$z = 1 - x^2 - y^2 + 2x, (x-1)^2 + y^2 = 1$$

---

3. Hallar a sabiendo que el flujo de $F(x,y,z) = (ax + 2y - 1 + x^3, x + y + y^3, 3z - 2 + z^3)$ hacia el exterior de la bola descripta por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ es 2π.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Construir una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 que tenga un extremo de valor 2 en $(1,-1)$ y tal que su matriz hessiana en dicho punto sea $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. ¿Qué tipo de extremo resulta en $(1,-1)$?

(**b**) Sea $F(x,y,z) = (xy + yz, y^2 + xz, xy)$ y sea S una superficie acotada sobre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Mostrar que la circulación de F a lo largo del borde de S es 0.

---

5. Hallar una solución $y(x)$ de la ecuación $x\,\mathrm{sen}(y)y' = \cos(y) + \mathrm{sen}(x)$ cuyo gráfico contenga al punto $(0,0)$.